GARA DI MATEMATICA ON-LINE (18/01/2016)
SOLUZIONI

1. PALAMEDE [100] Si considerino gli angoli $A\widehat{C}D$ e $D\widehat{A}P$, relativi ai triangoli APC e ADP, rispettivamente. Essi risultano essere congruenti poiché sottendono allo stesso arco AD. Allora $\triangle ADP \sim \triangle APC$; vale quindi la seguente relazione:
$\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{PD}{AP}$, da cui $PC = 180$ e $CD = 180 - 80 = 100$.

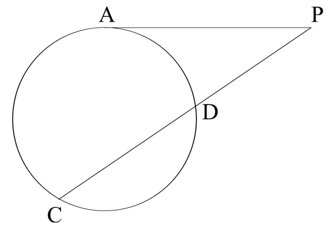

Figura 1: relativa all'es.1

2. VERSO TROIA [50]
Si osserva che ogni potenza di 2^4 termina con 6. Dato che $2^{100} = \left(2^4\right)^{25}$ ci sono almeno 25 numeri che finiscono col 6: dimostriamo che sono gli unici. Se $1 \leq k \leq 100$ e 4 non divide k, allora $k = 4s + i$, con $i = 1, 2, 3$. Quindi, $2^k = 2^{4s+i} = 2^{4s} \cdot 2^i$ con $2^i = 2, 4, 8$. Ovvero 2^{4s} termina per 6, ma $\left(2^{4s}\right) \cdot 2^i$ no! Pertanto, la soluzione è $25 \cdot 2 = 50$.

3. LE MURA DI TROIA [385]
Ogni torcia cambia stato una volta per ogni suo divisore. Cambiando stato un numero pari di volte, si ritorna allo stadio iniziale (torcia spenta), rimangono quindi accese le torce corrispondenti ai numeri con una quantità dispari di divisori. Osserviamo che solo i quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori. Infatti, siano n un qualunque numero intero positivo e d un suo divisore. Anche $\dfrac{n}{d}$ cioè $n = d^2$ ossia n è un quadrato perfetto. Le torce accese sono dunque quelle corrispondenti ai numeri: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

4. IL PALLADIO: [48]
Poiché 0 non è tra le cifre ammesse, si possono considerare le terne di tre cifre anziché i numeri. Le terne ordinate di tre cifre distinte e diverse da zero, tali che la loro somma sia 15, sono:
- se la prima cifra è 9: $(9, 5, 1), (9, 4, 2)$
- se la prima cifra è 8: $(8, 6, 1), (8, 5, 2), (8, 4, 3)$
- se la prima cifra è 7: $(7, 6, 2), (7, 5, 3)$
- se la prima cifra è 6: $(6, 5, 4)$.

In tutto sono 8. Poiché ciascuna di queste è formata da cifre distinte, per ottenere tutte le possibili terne, è sufficiente moltiplicare per le possibili permutazioni di 3 elementi cioè $3! = 6$. Il risultato è dunque $8 \cdot 6 = 48$.

5. "IN GRATITUDINE I GRECI OFFRONO AD ATENA PER PROPIZIARSI IL RITORNO":[15]
Si consideri la stringa $****33$ e si calcolino i suoi anagrammi: $\dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$. Se si sostituisce il numero 1212 al posto degli $*$, si ottiene quanto cercato.

6. TRIANGOLAZIONI DIVINE: [45°]
$\overline{AB} \cong \overline{AD} + \overline{DB}$. Posto $A\widehat{D}F \cong D\widehat{E}A = \beta$ e $C\widehat{F}E \cong F\widehat{E}C = \alpha$, allora l'angolo $A\widehat{E}C \cong 180° \cong \beta + x + \alpha = \dfrac{180° - \widehat{A}}{2} + x + \dfrac{180° - \widehat{C}}{2}$. Quindi $2x = \widehat{A} + \widehat{C} = 90°$, quindi $x = 45°$.

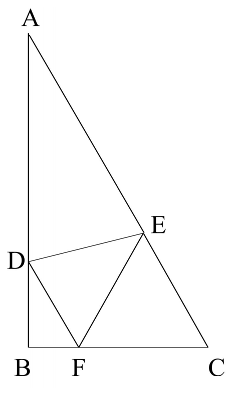

Figura 2: relativa all'es.6

7. L'ISOLA DEI LOTOFAGI: [1600]
La prima e l'ultima cifra sono del tipo $(a + 2; a)$ o $(a; a + 2)$: si hanno 16 possibili coppie. Le cifre centrali possono essere scelte in 10^2 modi; quindi si hanno $16 \cdot 10^2$ possibili numeri.

8. L'ACCECAMENTO DI POLIFEMO: [132]

Chiamiamo α l'angolo $A\widehat{B}C$ e β l'angolo $B\widehat{A}C$.
Poiché $\overline{AB} = \overline{BE}$, il triangolo ABE é isoscele quindi $B\widehat{E}A = \beta$.

Dal momento che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, segue facilmente che $B\widehat{C}A = 180° - \alpha - \beta$. $B\widehat{C}E$ è supplementare dell'angolo $B\widehat{C}A$, quindi $B\widehat{C}E = \alpha + \beta$.
Dunque $C\widehat{B}E = 180° - (\alpha+\beta) - \beta = 180° - \alpha - 2\beta$. Si verifica facilmente che $C\widehat{B}E$ è la metà del supplementare di $A\widehat{B}C$, quindi $C\widehat{B}E = 90° - \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow 180° - \alpha - 2\beta = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$, da cui si ottiene $\alpha + 4\beta = 180°$. Poiché $A\widehat{B}D$ è il supplementare di α e il triangolo ABD è isoscele, si ha che $A\widehat{D}B = A\widehat{B}D = 180° - \alpha$ e quindi $D\widehat{A}B = 180° - (180° - \alpha) - (180° - \alpha) = 2\alpha - 180°$. Poiché la retta AD è bisettrice dell'angolo esterno in A, si ottiene facilmente che $2(2\alpha - 180°) + \beta = 180°$ da cui $4\alpha + \beta = 540$. Mettendo a sistema le due equazioni trovate si ottiene che $A\widehat{B}C = \alpha = 132°$.

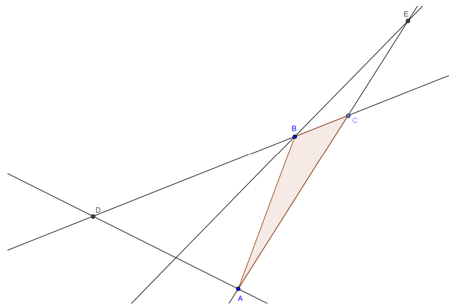

Figura 3: relativa all'es.8

9. EOLO: [28]

$4^{16} \cdot 5^{25} = \left(2^2\right)^{16} \cdot 5^{25} = 2^{32} \cdot 5^{25} = 2^7 \cdot 10^{25} = 128 \cdot 10^{25}$.
Quindi il numero è composto da 3 cifre (che servono per scrivere 128) e da 25 zero, ovvero da 28 cifre.

10. CIRCE: [7]

La condizione $\overline{AB} < 7\sqrt{3}$ ci assicura che è possibile scegliere un punto P interno a Γ tale che APB sia equilatero. Dal momento che per costruzione A, P, C stanno sulla circonferenza di raggio $\overline{AB}$ e centro B, l'angolo $A\widehat{C}P = \dfrac{1}{2} A\widehat{B}P = 60°$. Analogamente si ricava $A\widehat{O}Q = 2A\widehat{C}Q = 60°$. Poiché $\overline{OQ} = \overline{OA} = 7$ ne segue che il triangolo AOQ è equilatero, quindi $\overline{QA} = 7$. Indicato con α l'angolo $B\widehat{P}C = P\widehat{C}B$ otteniamo $Q\widehat{P}A = 180° - 60° - \alpha = 120° - \alpha$. Osserviamo poi che il quadrilatero $QABC$ è inscritto in una circonferenza e quindi $Q\widehat{A}B + B\widehat{C}Q = 180°$ e cioè $Q\widehat{A}P + 60° + \alpha = 180°$ da cui $Q\widehat{A}P = 120° - \alpha = A\widehat{P}Q$. Ciò significa che il triangolo APQ òè isoscele e quindi $\overline{PQ} = \overline{AQ} = 7$.

11. NELL'ADE: [8]

Le coppie che si possono formare con i 5 numeri sono $\dbinom{5}{2} = 10$. La probabilità che una qualsiasi di queste coppie sia scelta è $\dfrac{1}{10}$. Escludendo le coppie $(6,7)$, $(7;8)$, $(8,9)$ e $(9,10)$, restano sei coppie di numeri che differiscono di almeno 2. La probabilità cercata è quindi $\dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$, da cui $3 + 5 = 8$.

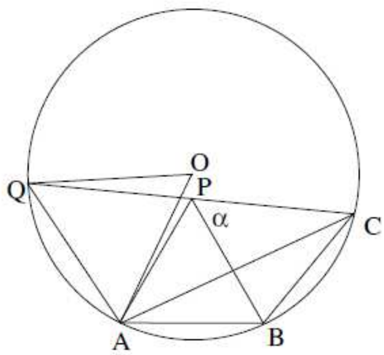

Figura 4: relativa all'es.11

12. L'ISOLA DELLE SIRENE: [28]

Visto che $2015 \equiv_6 5$, la quinta cifra vale 2, mentre la sesta 8.

13. SCILLA E CARIDDI: [15]

Se $\triangle ABC$ è retto in C, allora $A\widehat{B}C + C\widehat{A}B \cong 90°$, quindi l'angolo $A\widehat{B}C \cong 45°$. Disegnati i segmento $DF \perp AB$ e $CE \perp AB$, anche l'angolo ECB misura 45°. Allora $EB \cong EC \cong AE$, quindi $CE \cong \dfrac{1}{2}AB \cong \dfrac{1}{2}BD$. Allora il triangolo rettangolo rettangolo DBF ha angoli di $30°, 60°$. Allora $D\widehat{B}C = 45° - 30° = 15°$.

14. ELIO: [12]

Basta ricordare la formula per il calcolo di permutazioni con ripetizione: $\dfrac{4!}{2!} = 12$.

15. NAUSICAA: [5]

Sia r il raggio di ciascuna sfera. Allora il volume V_s delle sfere vale: $V_s = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^3$. Il volume del contenitore cilindrico $V_c = \pi r^2 \cdot 6r = 6\pi r^3$, dove $6r$ rappresenta l'altezza di tale cilindro. Quindi: $\frac{V_s}{V_c} = \frac{4\pi r^3}{6\pi r^3} = \frac{2}{3}$. Quindi la soluzione è $2 + 3 = 5$.

16. ALCINOO: [2]

$x^2 - xc = 1 - c \Rightarrow x^2 - xc - 1 + c = 0 \Rightarrow x^2 - 1 - xc + c = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) - c(x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1-c) = 0$. Dato che l'equazioner ha un'unica soluzione, $x = 1$, deve essere che $1 - c = -1$, ovvero $c = 2$.

17. I PROCI: [4688]

Calcolo le somme sulle varie righe:

PRIMA RIGA:	$7 = 2^0 \cdot 7$
SECONDA RIGA:	$2 + 7 + 5 = 14 = 7 \cdot 2 = 14$
TERZA RIGA:	$2 + 9 + 12 + 5 = 28 = 7 \cdot 2^2 = 7 \cdot 4 = 28$
QUARTA RIGA:	$2 + 11 + 21 + 17 + 5 = 56 = 7 \cdot 2^3 = 7 \cdot 8 = 56$
...	...
QUINDICESIMA RIGA:	$7 \cdot 2^{14} = 7 \cdot 16384 = 11\underline{4688}$.

18. LA GARA: [2357]

Poiché $6(x!+3)$ è sempre pari, y deve essere dispari. Se fosse $x \geq 4$, allora $x! \equiv 0 \pmod 8$ per cui $6(x!+3) \equiv 2 \pmod 8$. D'altra parte, se y é dispari, $y^2 \equiv 1 \pmod 8$, per cui $y^2 + 5 \equiv 6 \pmod 8$ il che è assurdo. Quindi $x < 4$. Si ha dunque:

$$\text{per } x = 1 \; y^2 = 6(x! + 3) - 5 = 19,$$
$$\text{per } x = 2 \; y^2 = 6(x! + 3) - 5 = 5^2,$$
$$\text{per } x = 3 \; y^2 = 6(x! + 3) - 5 = 7^2.$$

Le uniche soluzioni positive dell'equazione sono quindi le coppie $(2; 5)$ e $(3; 7)$ e quindi la soluzione cercata assume la forma 2357.

19. IL RICONOSCIMENTO DI PENELOPE: [115]

$$\frac{\cancel{7}}{4} \cdot \frac{\cancel{8}}{5} \cdot \frac{\cancel{9}}{6} \cdot \frac{\cancel{10}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{11}}{\cancel{8}} \cdot ... \cdot \frac{\cancel{22}}{\cancel{19}} \cdot \frac{23}{\cancel{20}} \cdot \frac{24}{\cancel{21}} \cdot \frac{25}{\cancel{22}} = ... = \frac{23 \cdot 24 \cdot 25}{4 \cdot 5 \cdot 6} = 115.$$

20. DIRITTI D'AUTORE: [1996]

Sia $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \neq 0$ e siano x_1, x_2, x_3 le sua radici. Poiché $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2 + x_3)$ e $\frac{d}{a} = -x_1 x_2 x_3$ l'ipotesi $\frac{p\left(\frac{1}{2}\right) + p\left(-\frac{1}{2}\right)}{p(0)} = 1000$ implica che:

$$\frac{\left(\frac{a}{8} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} + d\right) + \left(-\frac{a}{8} + \frac{b}{4} - \frac{c}{2} + d\right)}{d} = \frac{\frac{b}{2} + 2d}{d} = 1000$$

da cui si ricava $\frac{b}{2d} = 998 \Rightarrow \frac{b}{d} = 1996$.

Allora $\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2 x_3} = \frac{-\frac{b}{a}}{-\frac{b}{d}} = 1996.$